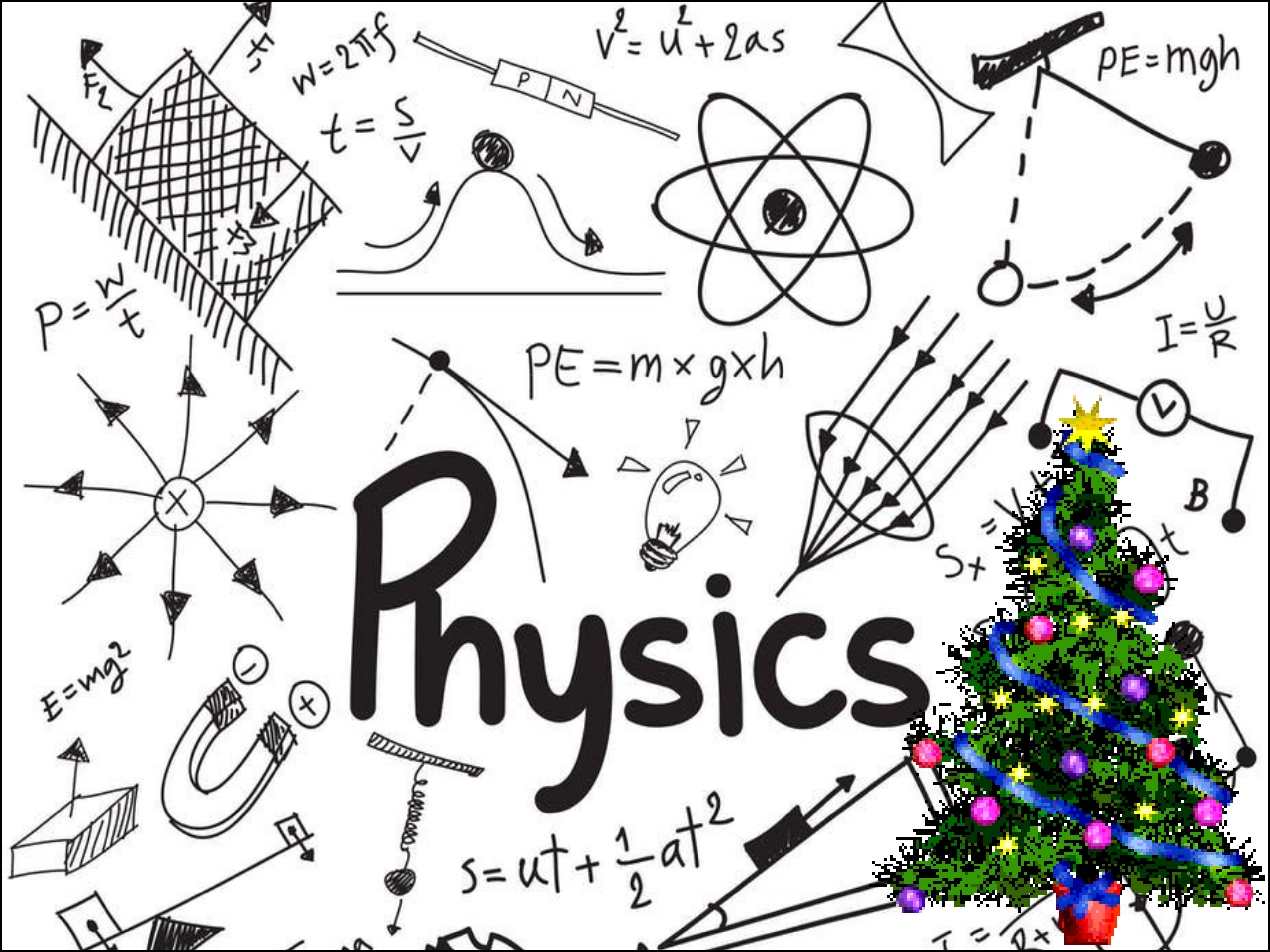


$w = 2\pi f$
P N
$V^2 = u^2 + 2as$
$PE = mgh$
$t = \frac{S}{V}$
$P = \frac{W}{t}$
$PE = m \times g \times h$
$I = \frac{U}{R}$
B
$E = mg^2$
Physics
$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **σεβασμός** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

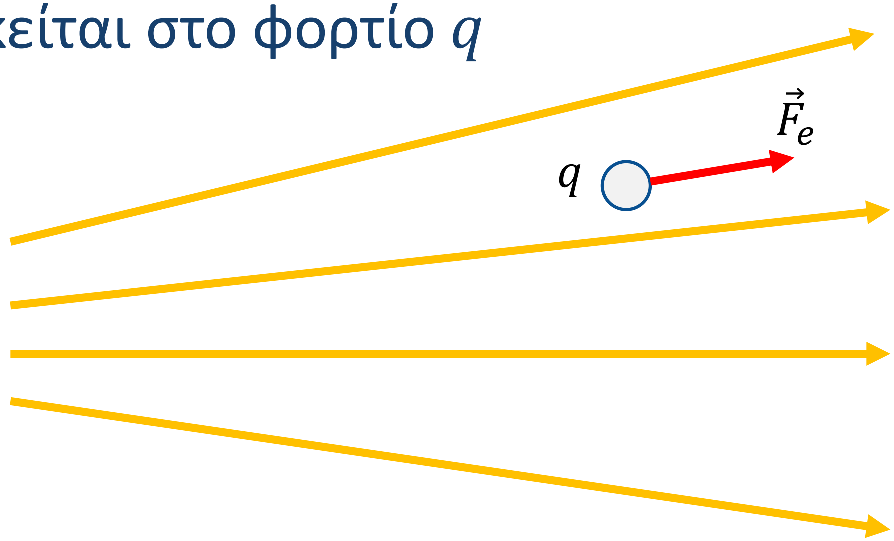
- **Εισαγωγή**
  - Στη μελέτη του ηλεκτρισμού ως τώρα, τον σχετίσαμε με την έννοια της ηλεκτρικής *δύναμης*
  - Τώρα θα συσχετίσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα με την έννοια της ***ενέργειας***
  - Θα ορίσουμε την έννοια του **ηλεκτρικού δυναμικού και της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας**
    - Το ηλεκτρικό δυναμικό έχει μεγάλη εφαρμογή στη λειτουργία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και συσκευών
  - Θα περιγράψουμε φαινόμενα με **μεγαλύτερη ευκολία** απ' ότι με χρήση πεδίων και δυνάμεων
    - …όπως περιγράψαμε πιο εύκολα τα φαινόμενα της Μηχανικής με ενεργειακά θεωρήματα σε σχέση με την περιγραφή μέσω δυνάμεων και εξισώσεων κινηματικής

Ηλεκτρικό Δυναμικό

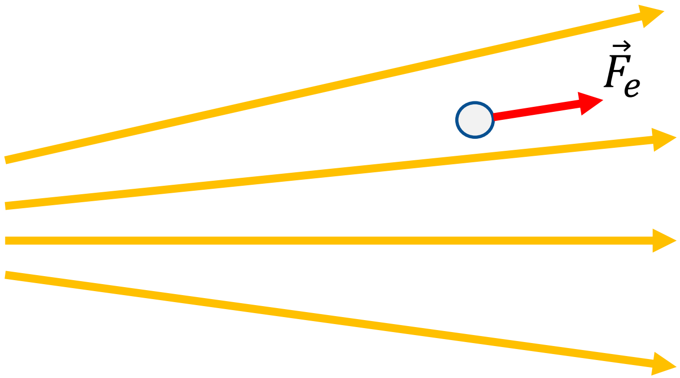
- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
- Έστω ένα φορτίο q που τοποθετείται σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
- Έστω το

  {φορτίο, πεδίο}

  ως ένα ***απομονωμένο σύστημα***
- Δύναμη $\vec{F}_e = q\vec{E}$ ασκείται στο φορτίο q



Ηλεκτρικό Δυναμικό

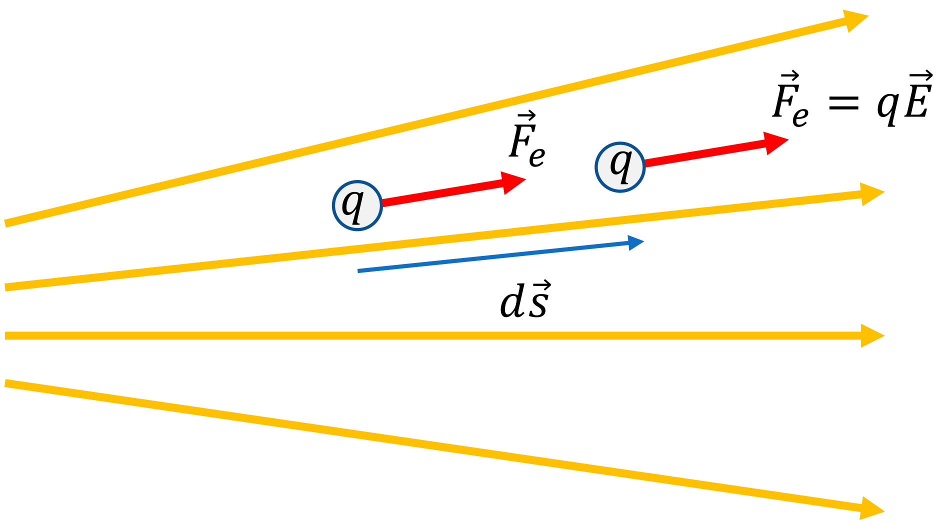


- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
- Δύναμη $\vec{F}_e = q\vec{E}$ ασκείται στο φορτίο q
  - Η δύναμη οφείλεται στο **πεδίο**
  - Το φορτίο θα κινηθεί λόγω της ηλεκτρικής δύναμης
  - Η ηλεκτρική δύναμη είναι ***συντηρητική*** (αποδεικνύεται πειραματικά) και ***εσωτερική*** δύναμη του συστήματος
  - Άρα το έργο της, W_{F_e}, είναι **εσωτερικό** στο σύστημα
- Άρα το **πεδίο παράγει εσωτερικό έργο στο σύστημα**
  - Όπως ακριβώς η βαρύτητα (βαρυτικό πεδίο) στο σύστημα {Γη,βιβλίο}, όταν το βιβλίο αφήνεται να πέσει από ύψος

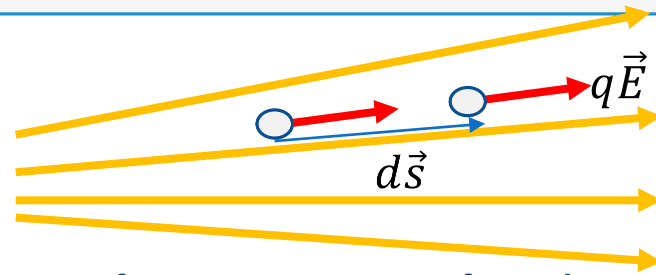
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
- Για μια **απειροστά μικρή** μετατόπιση $d\vec{s}$ ενός σημειακού φορτίου q στο ηλεκτρικό πεδίο…
  - …το έργο της ηλεκτρικής δύναμης που παράγεται στο φορτίο είναι

$$dW_{F_e} = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό



- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Θυμηθείτε: το έργο μιας **εσωτερικής συντηρητικής** δύναμης σε ένα σύστημα ισούται με την αρνητική μεταβολή της **δυναμικής του ενέργειας: της ηλεκτρικής δυναμικής του ενέργειας!**

$$dW_{F_e} = -dU_e$$

  - Άρα

$$dU_e = -dW_{F_e} = -\vec{F}_e \cdot d\vec{s} = -q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

  - Για πεπερασμένη μετατόπιση από ένα σημείο (Α) στο (Β) είναι

$$\Delta U_e = -W_{F_e} = \int dW_{F_e} = \int -q\vec{E} \cdot d\vec{s} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Δεν εξαρτάται απ'το μονοπάτι: $q\vec{E}$ συντηρητική δύναμη!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
- Για μια **συγκεκριμένη θέση** (Α) του φορτίου στο πεδίο, το σύστημα έχει μια δυναμική ενέργεια U_e^A, σε σχέση με μια θέση (Β) όπου έχει δυναμική ενέργεια $U_e^B = 0$ (διάταξη αναφοράς)
  - Για παράδειγμα, όταν το φορτίο βρίσκεται μακριά, στο άπειρο

- Έστω ότι το σύστημα **{πεδίο, φορτίο}** βρίσκεται σε μια διάταξη που έχει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U_e
- Διαιρώντας την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U_e με το φορτίο q λαμβάνουμε:

$$V = \frac{U_e}{q}$$

το οποίο ονομάζεται ***ηλεκτρικό δυναμικό (voltage)*** V

Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\Delta U_e = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
- Πριν λίγο ορίσαμε τη διαφορά δυναμικής ενέργειας ΔU_e μεταξύ δυο σημείων
- Η **διαφορά δυναμικού** μεταξύ δυο σημείων (A) και (B) ορίζεται ως: η **μεταβολή** στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος {πεδίο-φορτίο} όταν ένα φορτίο q μετακινείται μεταξύ δυο σημείων (A) και (B), δια το φορτίο αυτό:

$$\Delta V_{A\to B} = V_B - V_A$$

$$= \frac{U_e^B}{q} - \frac{U_e^A}{q} = \frac{\Delta U_e}{q}$$

$$= -\frac{1}{q} q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Παρατηρήστε ότι $1\,V = 1\,\frac{J}{C}$

Μονάδα μέτρησης δυναμικού: 1 Volt

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παρατηρήστε ότι $1\ V = 1\ \frac{N}{C} m$

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**

$$\Delta V_{A \to B} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Δεν εξαρτάται από το φορτίο q, παρά μόνο από το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$!
- Άρα η διαφορά δυναμικού αποτελεί ένα **χαρακτηριστικό του πεδίου**!
- Όπως και με τη δυναμική ενέργεια που έχουμε δει ως τώρα (βαρυτική, ελαστική), μόνο ***<u>διαφορές</u>*** δυναμικού έχουν νόημα
- Πολλές φορές ορίζουμε εμείς ένα σημείο/μια περιοχή/μια διάταξη του συστήματος ως **μηδενικού δυναμικού**

Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\Delta V_{A\to B} = V_B - V_A = \frac{\Delta U_e}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - **Προσοχή**: η διαφορά δυναμικού δεν είναι το ίδιο με τη διαφορά δυναμικής ενέργειας
    - Η διαφορά δυναμικού μεταξύ (Α) και (Β) υπάρχει αποκλειστικά λόγω **μιας πηγής φορτίου, δηλ. ενός ηλεκτρικού πεδίου,** και εξαρτάται από την κατανομή αυτής
    - Για να υπάρχει διαφορά δυναμικής ενέργειας, πρέπει να υπάρχει ένα σύστημα με τουλάχιστον **δυο** μέλη (δυο φορτία ή ένα φορτίο και ένα πεδίο)!
      - Η δυναμική ενέργεια ανήκει στο σύστημα και αλλάζει μόνον αν ένα φορτίο μετακινηθεί σε σχέση με τη διάταξη αναφοράς του συστήματος!
  - Σκεφτείτε το όμοια με το ηλεκτρ. πεδίο και την ηλεκτρ. δύναμη…
    - Το πεδίο υπάρχει λόγω μιας πηγής φορτίου
    - Η ηλεκτρ. δύναμη εγείρεται σε άλλο φορτίο στο χώρο του πεδίου
      - Απαιτούνται δηλαδή τουλάχιστον δυο φορτία (ή φορτίο και πεδίο) για την ηλεκτρική δύναμη!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\Delta V_{A\to B} = V_B - V_A = \frac{\Delta U_e}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
- Κάποιος **εξωτερικός** παράγοντας μετακινεί ένα φορτίο q από τη θέση Α στη θέση Β ενός ηλεκτρικού πεδίου
  - Χωρίς να μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια (πολύ αργά δηλαδή)
- Παράγεται **εξωτερικό** έργο W_{ext} στο σύστημα
  - Αλλάζει η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος!
- Άρα από την Α.Δ.Ε **μη** απομονωμένου συστήματος:

$$\Delta U_e = W_{ext}$$

κι αφού

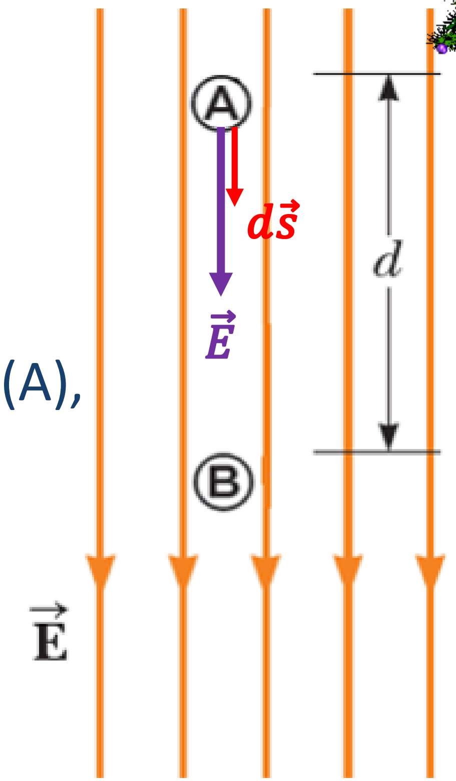
$$\Delta V_{A\to B} = \frac{\Delta U_e}{q}$$

θα έχουμε

$$\boxed{W_{ext} = q\Delta V_{A\to B} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -W_{F_e}}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
- Ας απλοποιήσουμε τα πράγματα ☺
- Έστω ένα **<u>ομογενές</u>** ηλεκτρικό πεδίο
- Ας υπολογίσουμε τη ΔV ανάμεσα στα σημεία (A), (B), απόστασης d
    - Η μετατόπιση $d\vec{s}$ από το (A) στο (B) είναι **παράλληλη** στις δυναμικές γραμμές



$$V_B - V_A = \Delta V_{A\to B}$$

$$= -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B E ds$$

$$= -E\int_A^B ds = -Ed$$

- Άρα $\Delta V_{A\to B} = -Ed$

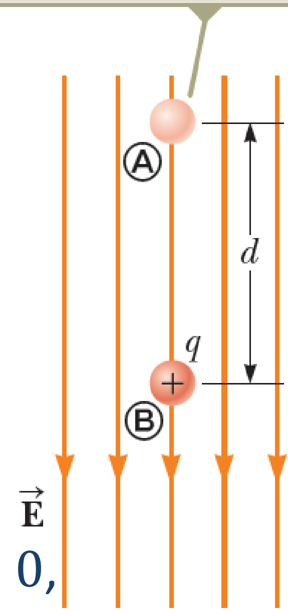
Όσο «προχωράμε» προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών, το δυναμικό μειώνεται!

$$\Delta V_{A\to B} = -Ed$$

Όταν ένα θετικό φορτίο μετακινείται από το (A) στο (B), η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μικραίνει.

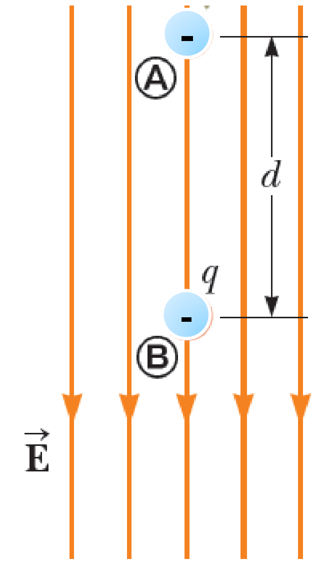
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα φορτίο $+q$ που κινείται από το (Α) στο (Β)
- Τότε $\Delta U_e = q\Delta V_{A\to B} = -qEd$
- Βλέπουμε ότι $\Delta U_e < 0 \Leftrightarrow U_{e_B} < U_{e_A}$
  - Αυτό σημαίνει ότι η **δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει** όταν το **θετικό** φορτίο κατευθύνεται **προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών**
  - Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (Α) ένα φορτίο $q > 0$, αυτό θα κινηθεί προς τα «κάτω» λόγω ηλεκτρικής δύναμης
    - Άρα επιταχύνεται **(2^{ος} νόμος Newton)** → αποκτά **κινητική ενέργεια**
    - Όσο προχωρά προς τα κάτω, η **δυναμική ενέργεια του συστήματος {φορτίο, πεδίο} μειώνεται εξίσου με την αύξηση της κιν. ενέργειας!**
      - Σας εκπλήσσει αυτό; ☺ Γιατί συμβαίνει;



$$\Delta V_{A\to B} = -Ed$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό



- **Διαφορά Δυναμικού**
- Ας θεωρήσουμε, στην ίδια διάταξη, τώρα ένα φορτίο $-q$ που κινείται από το (Β) στο (Α) (δε γίνεται να κινηθεί Α → Β)
- Τότε $\Delta U_e = -q\Delta V_{B\to A} = -q(Ed) = -qEd$
  - …αφού τώρα μετράμε $\Delta V_{B\to A}$ και όχι $\Delta V_{A\to B}$
- Βλέπουμε ότι πάλι $\Delta U_e < 0 \Leftrightarrow U_{e_B} < U_{e_A}$!
  - Αυτό σημαίνει ότι η **δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει** ξανά όταν το **αρνητικό** φορτίο κατευθύνεται προς **αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών**
  - Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (Β) ένα φορτίο $q < 0$, αυτό θα κινηθεί προς τα «πάνω» λόγω ηλεκτρ. δύναμης
    - Άρα επιταχύνεται → αποκτά **κινητική ενέργεια**
    - Όσο προχωρά προς τα πάνω**, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μειώνεται εξίσου**.
    - **Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας σε απομονωμένο σύστημα!**

$$\Delta V_{A \to B} = -Ed$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

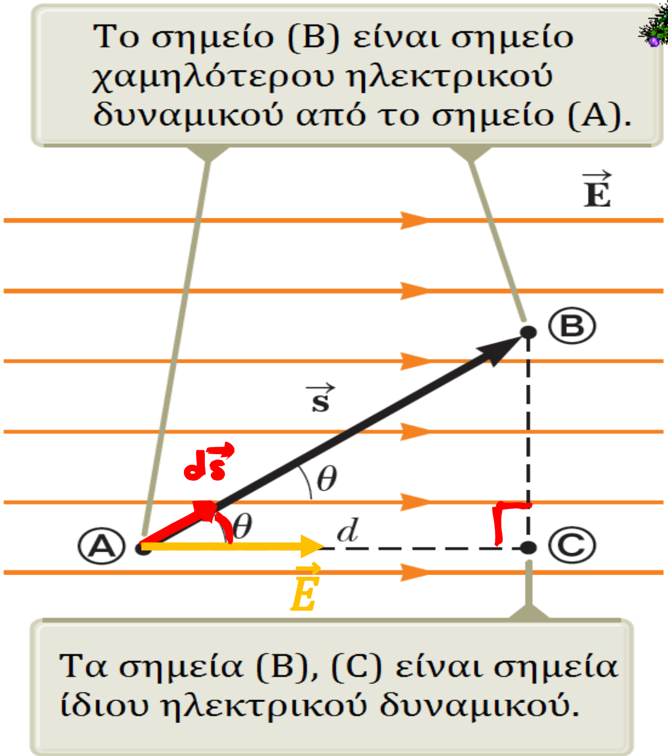
- **Διαφορά Δυναμικού**
- Συμπέρασμα:

- **Όταν ένα φορτίο κινείται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, κινείται πάντα προς διατάξεις {φορτίου, πεδίου} που η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται!**

- **Αυτό συμβαίνει γιατί το σύστημα αυξάνει την κινητική του ενέργεια σε κάθε περίπτωση (το φορτίο κινείται)…**
  - **… κι επειδή είναι απομονωμένο, αναγκαστικά πρέπει η ηλεκτρική του δυναμική ενέργεια να μειώνεται…**
  - **…λόγω Αρχής Διατήρησης της (Δυναμικής) Ενέργειας!**

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
- Ας γενικεύσουμε τώρα για μετατόπιση **μη παράλληλη** στις δυναμικές γραμμές



- Έστω ότι η μετατόπιση $\vec{s}$ από το (A) στο (B): **ΔΕΝ** είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές
- Τότε για τη μετατόπιση $\vec{s}$

$$\Delta V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B E ds \cos(\theta) = -E\cos(\theta)\int_A^B ds$$

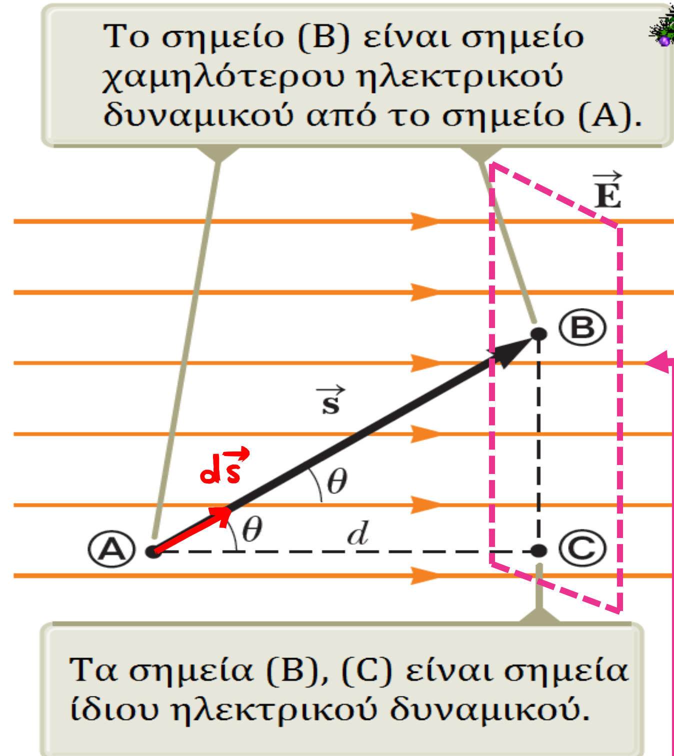
$$= -E\underbrace{s\cos(\theta)}_{d} = -Ed$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
- Άρα για το σύστημα **{πεδίο, φορτίο}**

$$\Delta U_e = -q\vec{E}\cdot\vec{s} = q\underbrace{\Delta V_{AB}}_{-Ed} = -qEd$$

- Όμως είδαμε πριν ότι



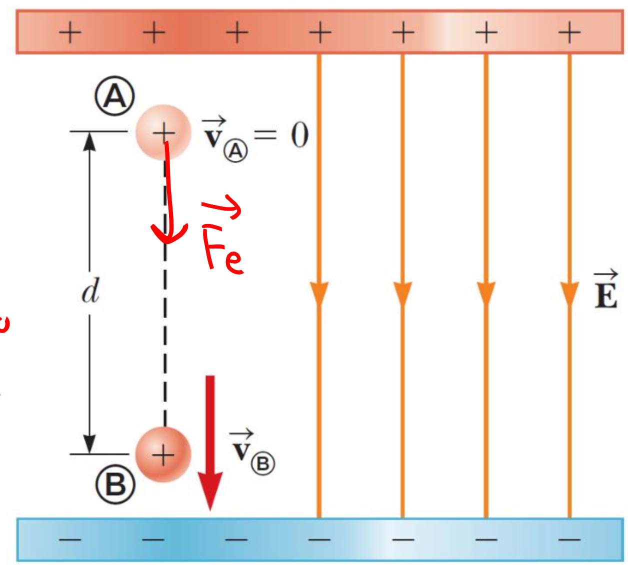
$$\Delta V_{AC} = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\int_A^C d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\vec{s}_{AC} = -Ed$$

- <u>Συμπέρασμα</u>: **σημεία που βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο** στο ομογενές πεδίο έχουν ίδιο δυναμικό (**ισοδυναμική** επιφάνεια)

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα πρωτόνιο αφήνεται από το σημείο (Α) σε ομογενές ηλεκτρ. πεδίο μέτρου $8 \times 10^4 \frac{V}{m}$. Το πρωτόνιο υπόκειται σε μετατόπιση μέτρου $d = 0.5\ m$ στο σημείο (Β) στην κατεύθυνση του $\vec{E}$.
    Βρείτε την ταχύτητα του πρωτονίου στη θέση (Β).
    Θεωρήστε ότι $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C και $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.

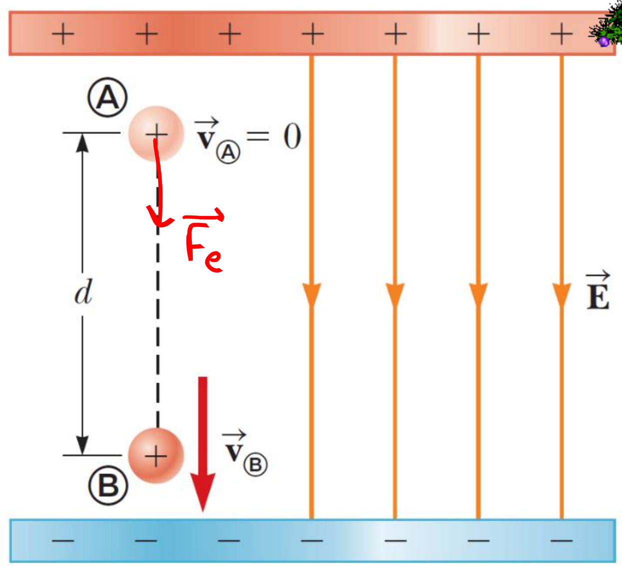
Το πρωτόνιο θα κινηθεί λόγω επίδρασης ηλεκτρικής δύναμης $\vec{F_e}$. Η κίνησή του θα είναι προς τα κάτω, όπως στο σχήμα. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το πρωτόνιο ως σώμα υπό επίδραση δύναμης, αλλά κι λύσαμε το πρόβλημα ενεργειακά.



$$* \quad \Delta U_e = -qE\cdot d$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε την ταχύτητα του πρωτονίου στη θέση (Β). Θεωρήστε ότι $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C και $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.



Έστω το σύστημα {πεδίο, φορτίο}, απομονωμένο και διμελές. Η $\vec{F}_e$ είναι είναι εσωτερική και συντηρητική. Άρα μπορώ να εφαρμόσω την ΑΔΜΕ$_{A\to B}$:

$$\Delta E_{MHX}^{A\to B} = 0 \Leftrightarrow E_{MHX}^{A} = E_{MHX}^{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_A + U_{e,A} = K_B + U_{e,B} \Leftrightarrow \Delta K_{A\to B} = -\Delta U_{e,A\to B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 \overset{*}{=} -(-qEd) = qEd$$

$$\Leftrightarrow u_B^2 = \frac{2qEd}{m} \Rightarrow u_B = -\sqrt{\frac{2qEd}{m}} \simeq -2.8\cdot 10^6 \,\frac{m}{s}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Θα μελετήσουμε διαφορές δυναμικού σε δυο περιπτώσεις
  - 1. Δυναμικό από σημειακά φορτία
  - 2. Δυναμικό από κατανομή φορτίου

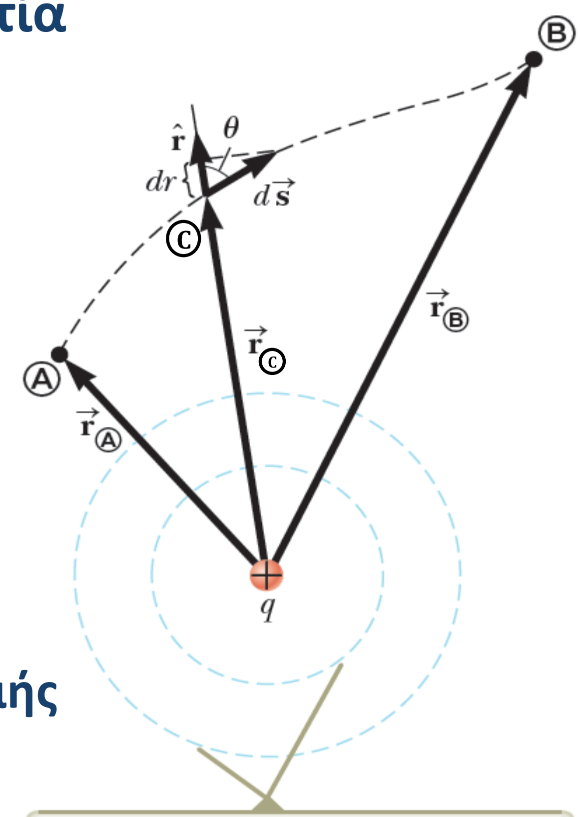
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Μπορεί κανείς να δείξει ότι:

    για δυο σημεία (A), (B) εντός ηλεκτρικού πεδίου πηγής φορτίου q που απέχουν απόσταση r_A, r_B από την πηγή φορτίου, η διαφορά δυναμικού $\Delta V_{A\to B}$ δίνεται από τη σχέση

$$\Delta V_{A\to B} = V_B - V_A = k_e q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

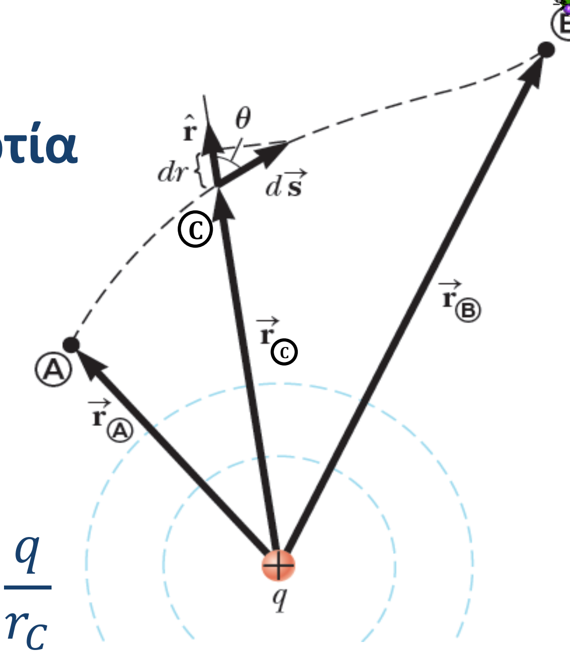
  - Βλέπετε ότι είναι **ανεξάρτητη της διαδρομής** από το (A) στο (B)
    - Το πεδίο είναι ***συντηρητικό***
  - Επίσης, εξαρτάται μόνο από τα r_i
  - Ποια η σχέση για το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα τυχαίο σημείο C?



Οι δυο διακεκομμένοι κύκλοι αναπαριστούν τομές σφαιρικών επιφανειών με ίδιο δυναμικό.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Συνήθως θεωρούμε ότι $V = 0$ σε ένα σημείο μακριά από την πηγή φορτίου, με $r_{μακρια} = \infty$
  - **Ηλεκτρικό δυναμικό V_C λόγω σημειακού φορτίου σε απόσταση r_C από το φορτίο**:



$$V_C - V_{μακρια} = V_C - 0 = k_e \frac{q}{r_C}$$

  - Άρα τελικά για οποιοδήποτε σημείο C σε απόσταση r_C από την πηγή q θα έχουμε

$$\boxed{V_C = k_e \frac{q}{r_C}}$$

  - Για πολλές πηγές φορτίου,

$$V_c = \sum V_i = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

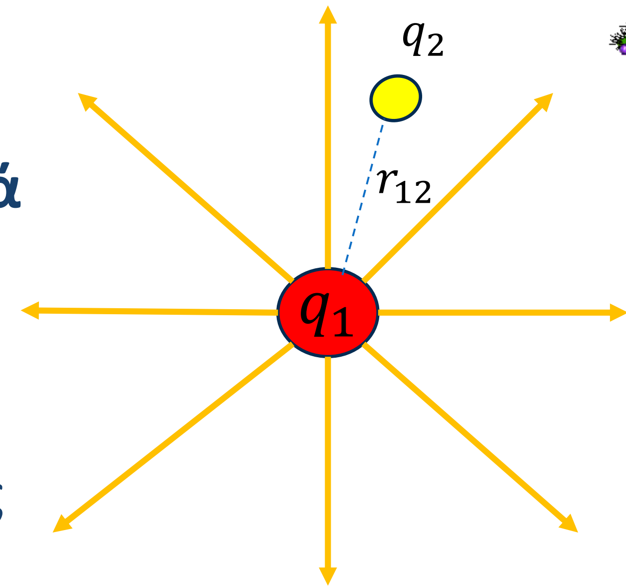
Ηλεκτρικό Δυναμικό

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ!

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου κάποια **εξωτερική** δύναμη μετακινεί ένα φορτίο στο πεδίο
    - Από ένα σημείο (A) σε ένα (B)
    - Χωρίς να αλλάζει την κινητική του ενέργεια (σταθερή ταχύτητα)
    - Αλλάζει όμως η ηλεκτρική **δυναμική** ενέργεια!
      - **Αλλαγή της διάταξης/σύνθεσης/διαμόρφωσης του συστήματος**
  - Μη απομονωμένο σύστημα **{πεδίο, φορτίο}**:
    - **Αρχή Διατήρησης Ενέργειας:**

$$\left.\begin{aligned} W_{ext} &= \Delta K + \Delta U_e = 0 + \Delta U_e \\ \Delta V_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} &= \frac{\Delta U_e}{q} \Rightarrow \Delta U_e = q\Delta V_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \end{aligned}\right\} W_{ext} = q\Delta V_{A\to B}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό



- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Για ένα φορτίο q_2 που έρχεται στο πεδίο πηγής q_1 σε απόσταση r_{12} (θέση C) μέσω **εξωτερικής** δύναμης έργου W_{ext}
  - Το φορτίο q_2 έρχεται από πολύ «μακριά»:

$$V_{\mu\alpha\kappa\rho\iota\alpha} = 0$$

- Όταν το q_2 βρίσκεται «μακριά», η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων θεωρείται μηδενική
- Το έργο W_{ext} μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια U_e του συστήματος των φορτίων, δηλ.

$$W_{ext} = \Delta U_e = U_e - U_{\mu\alpha\kappa\rho\iota\alpha} = U_e$$

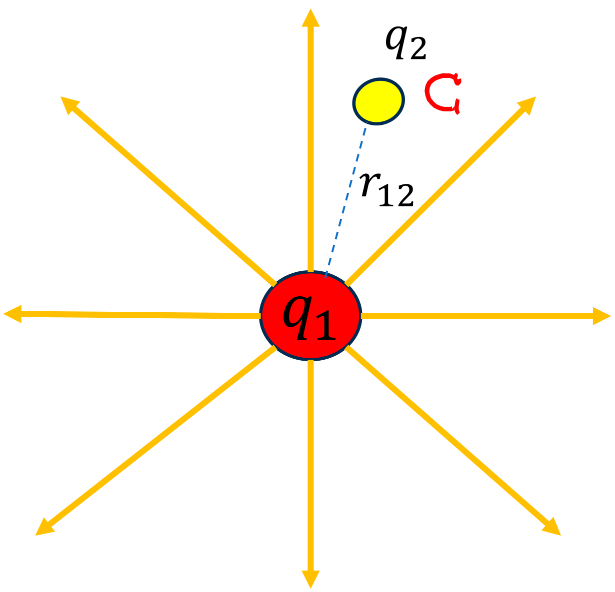
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Άρα η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός ζεύγους φορτίων είναι

$$\Delta U_e = W_{ext} = q_2 \Delta V = q_2\left(V_c - V_{\mu\alpha\kappa\rho\iota\alpha}\right)$$

$$U_e - 0 = q_2\left(k_e\frac{q_1}{r_{12}} - 0\right) = q_2 V_c$$

$$\boxed{U_e = k_e\frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Για ένα φορτίο q_2 που έρχεται στο πεδίο φορτίου q_1 σε απόσταση r_{12} μέσω εξωτερικής δύναμης

$$\boxed{U_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

  - Αν $U_e > 0$, το έργο της εξωτ. δύναμης είναι θετικό
    - Τα φορτία απωθούνται, άρα πρέπει να παραχθεί έργο από την εξωτερική δύναμη για να τα φέρει σε απόσταση r_{12}
  - Αν $U_e < 0$, το έργο της εξωτ. δύναμης είναι αρνητικό
    - Τα φορτία έλκονται, άρα πρέπει να παραχθεί αρνητικό έργο (χρειάζεται δύναμη αντίθετη στην μετατόπιση (έλξη) των φορτίων) για να τα κρατήσουμε σε απόσταση r_{12}

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Για πολλά φορτία,

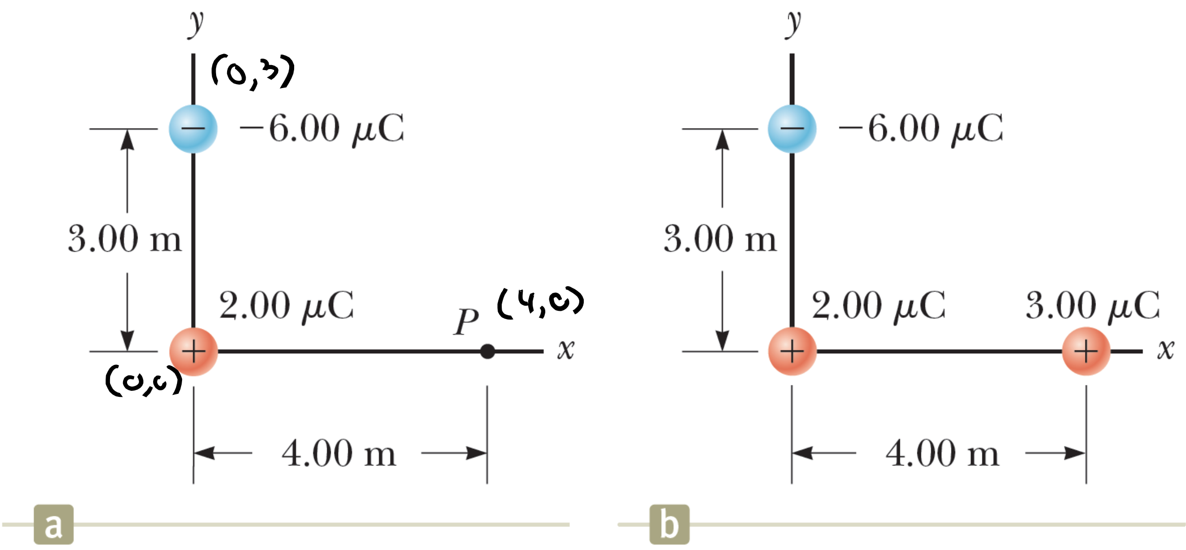
$$U_e = \sum U_{e\,(k,m)} = k_e \sum \frac{q_k q_m}{r_{km}}\ , k = 1,2,3 \ldots < m = 1,2,3, \ldots$$

  - Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι αθροίζουμε όλες τις τιμές δυναμικής ενέργειας που οφείλονται σε ένα ζεύγος φορτίων
  - Π.χ. για τέσσερα φορτία, θα έχουμε

$$U_e = U_{e\,(1,2)} + U_{e\,(2,3)} + U_{e\,(3,4)} + U_{e\,(1,3)} + U_{e\,(1,4)} + U_{e\,(2,4)}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα φορτίο $q_1 = 2\ \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6\ \mu C$ στη θέση $(0, 3)$ m.
    Α) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες $(4, 0)$ m.
    Β) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3\ \mu C$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.



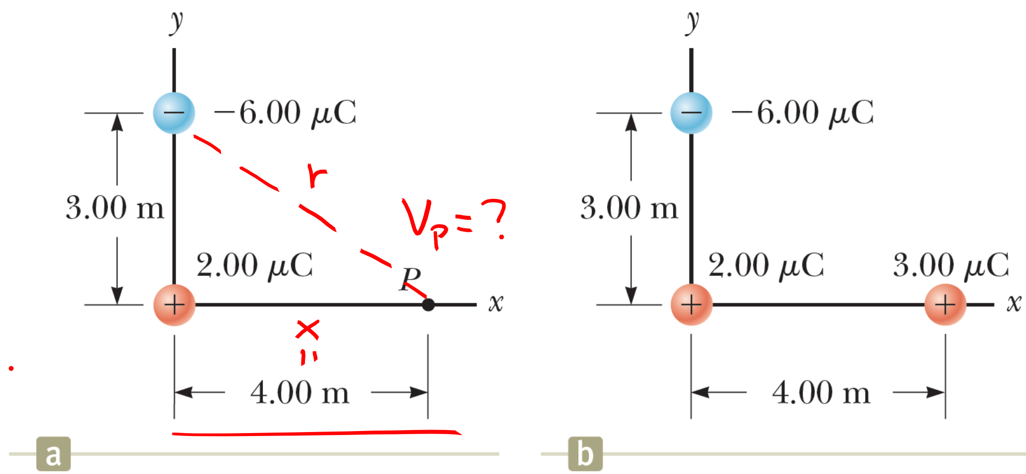
Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα φορτίο $q_1 = 2\ \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6\ \mu C$ στη θέση $(0, 3)\ m$.
  A) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες $(4, 0)\ m$.

• Για την πηγή φορτίου q_1:

$$V_{P_1} = k_e \frac{q_1}{r_{1P}} = k_e \frac{q_1}{x}$$



• Για την πηγή φορτίου q_2:

$$V_{P_2} = k_e \frac{q_2}{r}$$

Συνολικά, $V_P = V_{P_1} + V_{P_2} = k_e \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{r} \right) =$

$$= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} + \frac{-6 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} - \frac{6 \cdot 10^{-6}}{5} \right) \simeq -6.3 \cdot 10^3\ V$$

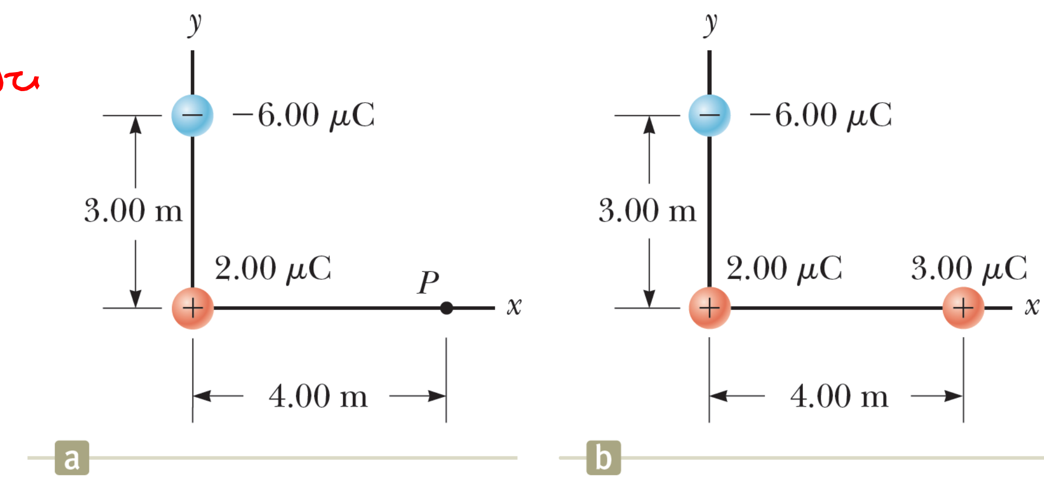
Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα φορτίο $q_1 = 2\ \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6\ \mu C$ στη θέση $(0, 3)\ m$.
  B) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3\ \mu C$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.

Από τη θεωρία, είδαμε ότι

$$\Delta U_e = q_3 \cdot V_P$$
$$= 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-6.3 \cdot 10^{3})$$
$$\simeq -1.9 \cdot 10^{-2}\ J$$



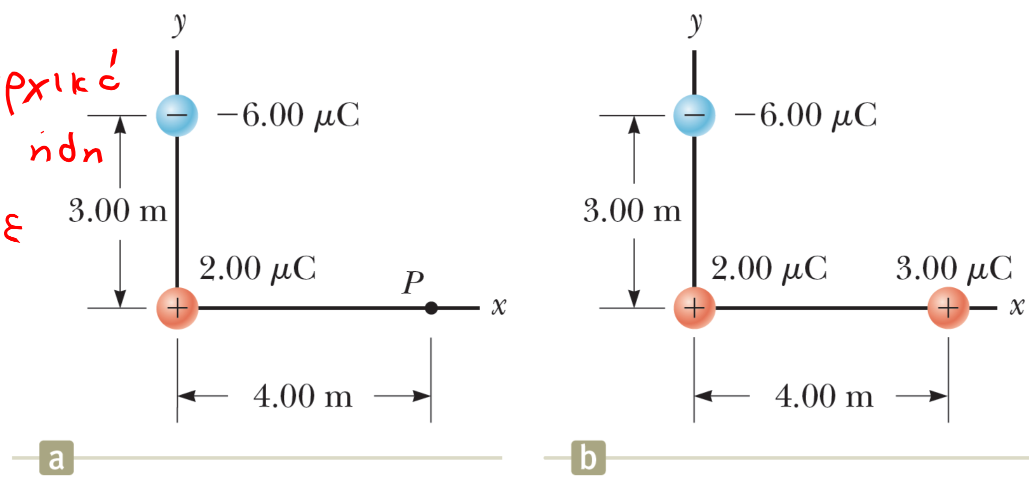
Ουσιαστικά, υπολογίζαμε το $\Delta U_e^{\infty \to P} = q_3\, \Delta V_{\infty \to P}$

$$\Delta U_e = q_3 \left(V_P - \cancel{V_\infty}^{\,0} \right)$$
$$= q_3 \cdot V_P .$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα – 2η Λύση:

- Ένα φορτίο $q_1 = 2\ \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6\ \mu C$ στη θέση $(0,3)\ m$.
  B) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3\ \mu C$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.



Εναλλακτικά, μια και το αρχικό μας σύστημα περιλαμβάνει ήδη δυο φορτία, θα μπορούσαμε να γράφαμε:

$$\Delta U_e = U_e(\text{τριών φορτίων}) - U_e(\text{δυο φορτίων})$$

$$= k_e \cancel{\frac{q_1 q_2}{r_{12}}} + k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k_e \frac{q_2 q_3}{r_{23}} - \left(k_e \cancel{\frac{q_1 q_2}{r_{12}}} \right)$$

$$= k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k_e \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \cong -1.9 \cdot 10^{-2}\ J$$, ίδιο αποτέλεσμα με πριν.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Ηλεκτρικό δυναμικό: χαρακτηριστικό του πεδίου!

- **Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ από το δυναμικό V;
  - Αν θεωρήσουμε μια μικρή διαφορά δυναμικού dV μεταξύ δυο σημείων απειροστά μικρής απόστασης $d\vec{s}$, τότε

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

  - Αν το ηλεκτρ. πεδίο έχει μόνο μια συνιστώσα (έστω x, αλλά όμοια ισχύει και για τις υπόλοιπες συνιστώσες), τότε

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_x dx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

και άρα

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Τι σας θυμίζει??

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Ηλεκτρικό δυναμικό: χαρακτηριστικό του πεδίου!

- **Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό**
- Γενικότερα,

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k} = -\left[\frac{dV}{dx}\,\vec{\imath} + \frac{dV}{dy}\,\vec{\jmath} + \frac{dV}{dz}\,\vec{k}\right]$$

- Πολλές φορές γράφουμε

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{V}$$

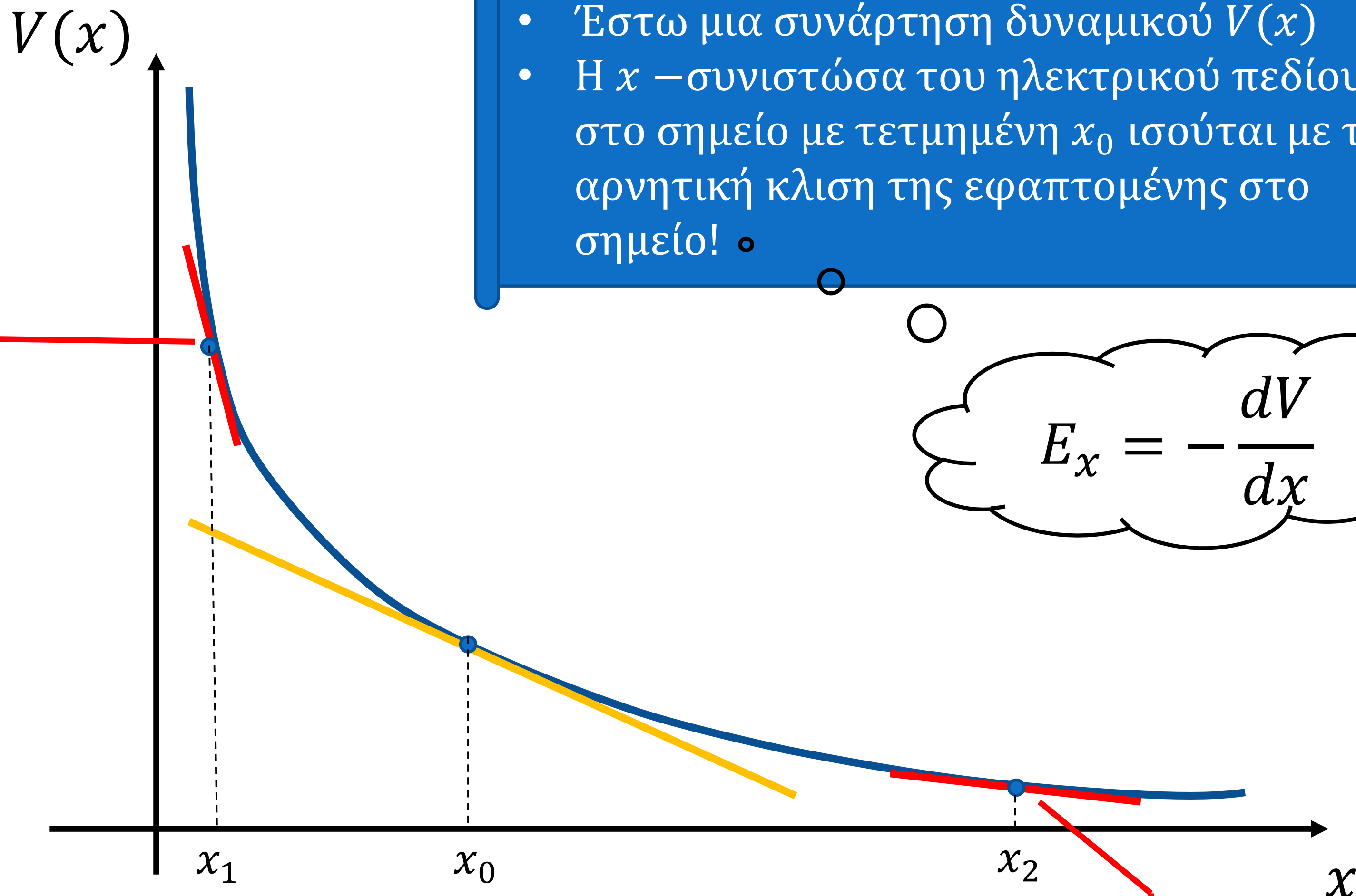
με **∇** να συμβολίζει την παράγωγο σε όλες τις συνιστώσες μαζί και να ονομάζεται **gradient** (**ανάδελτα**, **βαθμίδα,** ή **κλίση**)

- **Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μια μέτρηση του ρυθμού μεταβολής του ηλεκτρικού δυναμικού συναρτήσει της θέσης στο χώρο!**
- **Ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο ⇔ μεγάλη μεταβολή του δυναμικού!**
- **Το διάνυσμα $\vec{E}$ δείχνει σε περιοχές χαμηλότερου δυναμικού!**

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Έστω μια συνάρτηση δυναμικού $V(x)$
- Η x −συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο με τετμημένη x_0 ισούται με την αρνητική κλιση της εφαπτομένης στο σημείο!

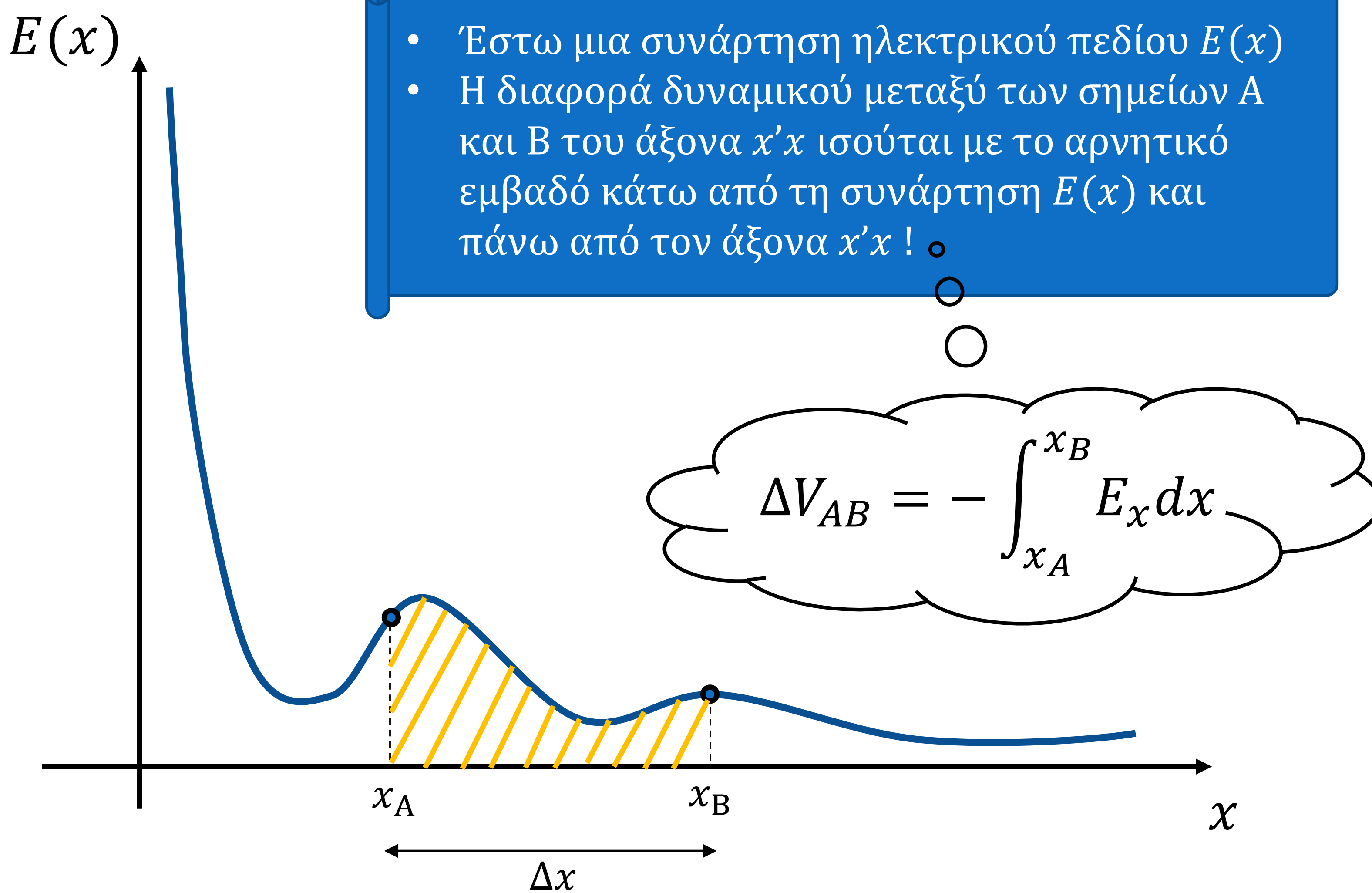
$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$



Ηλεκτρικό πεδίο πιο ισχυρό στο σημείο x_1 απ'ότι στο x_2 !

Ηλεκτρικό Δυναμικό

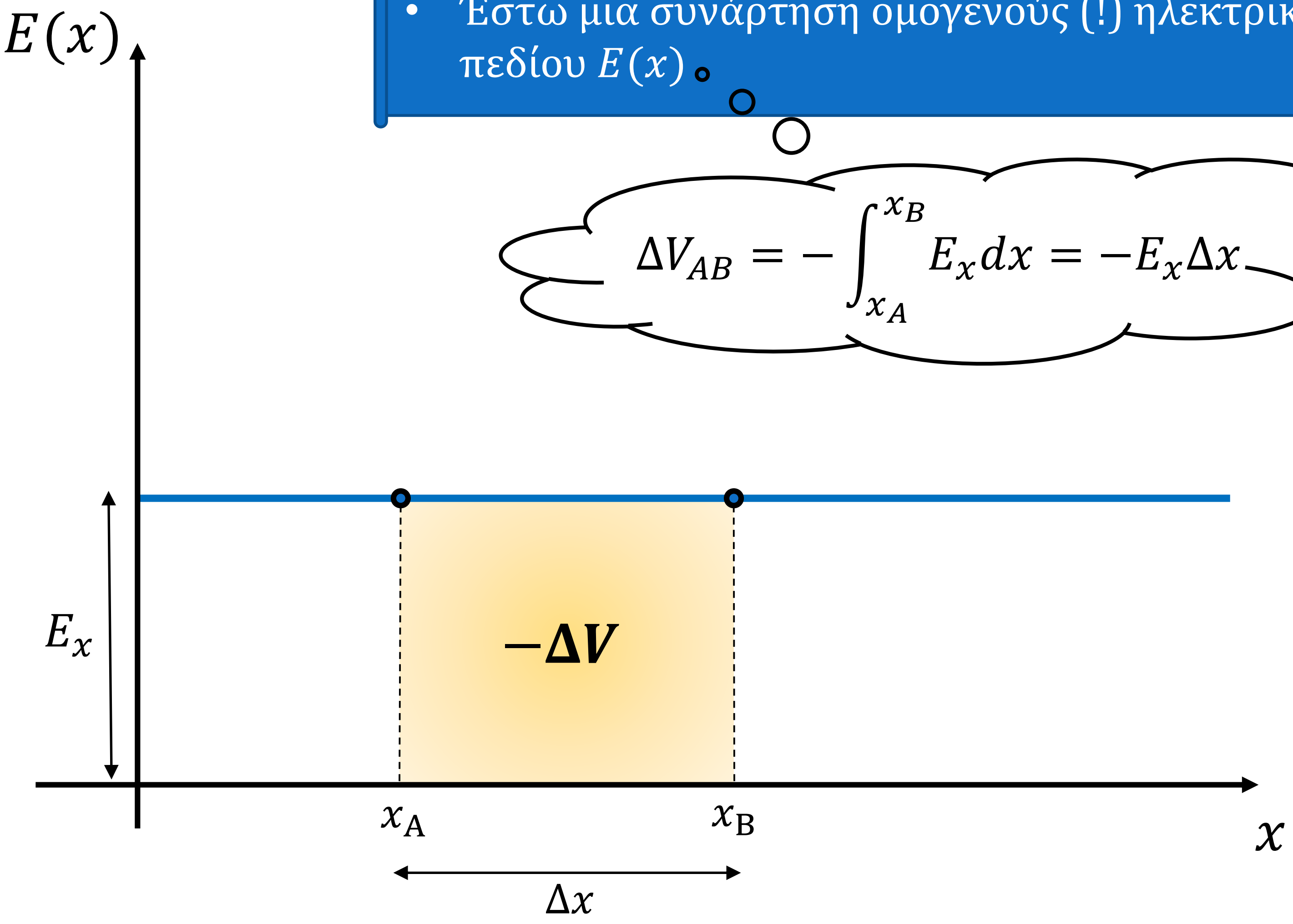
- Έστω μια συνάρτηση ηλεκτρικού πεδίου $E(x)$
- Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β του άξονα $x'x$ ισούται με το αρνητικό εμβαδό κάτω από τη συνάρτηση $E(x)$ και πάνω από τον άξονα $x'x$!



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Έστω μια συνάρτηση ομογενούς (!) ηλεκτρικού πεδίου $E(x)$

$$\Delta V_{AB} = -\int_{x_A}^{x_B} E_x dx = -E_x \Delta x$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Συνεχής κατανομή φορτίου**
- Ας γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας σε μια συνεχή κατανομή φορτίου
- **Αν η κατανομή φορτίου είναι γνωστή, θεωρούμε το δυναμικό dV σε σημείο P απόστασης r λόγω σημειακού φορτίου dq, το οποίο είναι**

$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

και ολοκληρώνουμε, παίρνοντας

$$V = \int dV = k_e \int \frac{dq}{r}$$

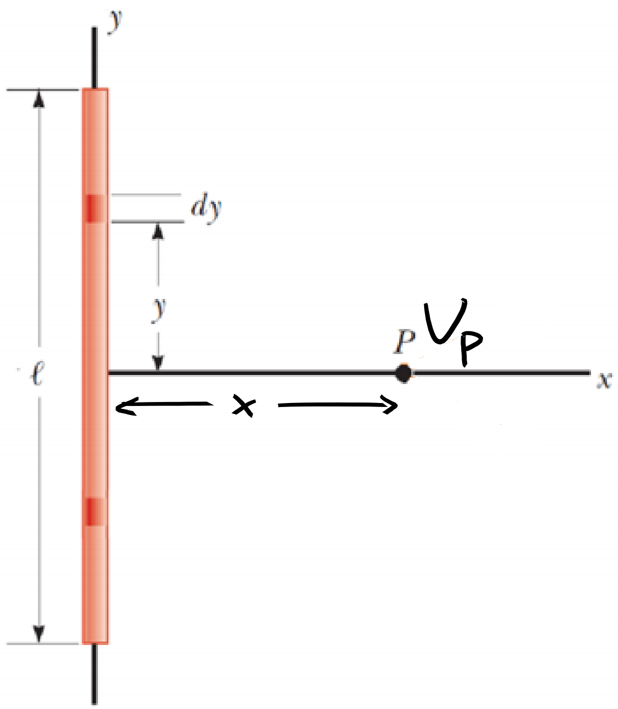
Σημείο μηδενικού δυναμικού θεωρείται πάντα ένα σημείο απείρως μακριά από την κατανομή φορτίου.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 1:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P για μια ράβδο μήκους ℓ με ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο σημείο.

Hint: από ηλεκτρικά πεδία

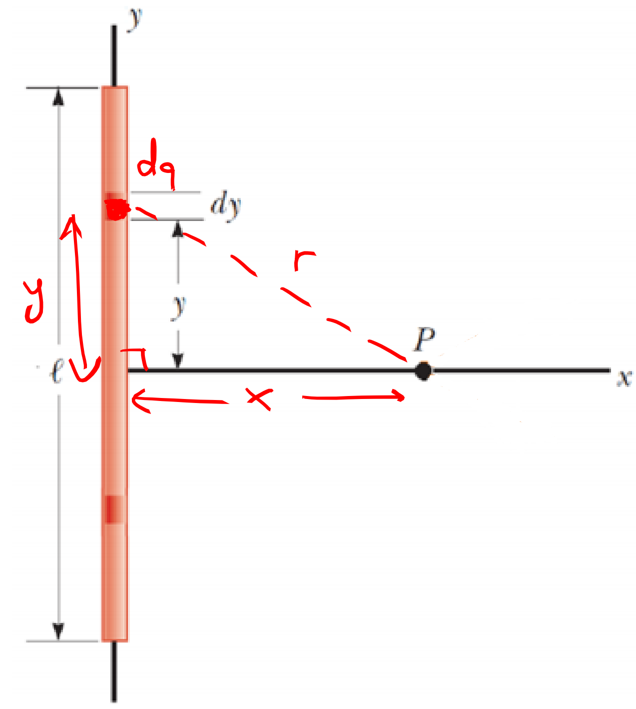
$$\vec{E}_P = k_e \frac{Q}{x\sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \vec{i}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P για μια ράβδο μήκους l με ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$.



Τμηματοποιώ τη ράβδο σε τμήματα απειροστά μικρά φορτία dq, μήκους dy.

Ισχύει $\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{dy}$ (1)

Το ηλ. δυναμικό στο σημείο P λόγω πηγής φορτίου dq θα είναι:

$$dV_P = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\overset{(1)}{=} k_e \frac{\lambda\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο σημείο.

$\log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$

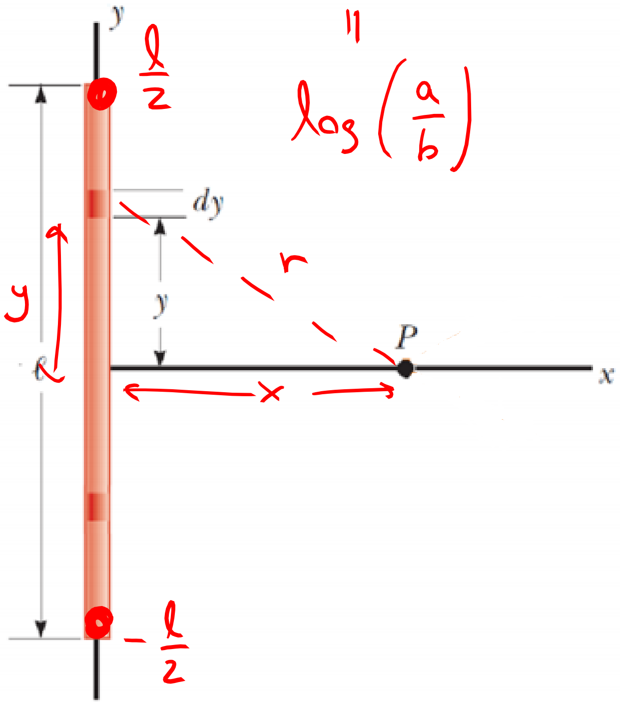
Για το συνολικό δυναμικό στο P, θα έχουμε

$$V_P = \int dV_P$$

$$= k_e \lambda \int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = k_e \lambda \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= k_e \lambda \left(\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\Bigg|_{y=-\frac{\ell}{2}}^{y=\frac{\ell}{2}}$$

$$= k_e \lambda \left(\ln\left(\frac{\ell}{2}+\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}\right) - \ln\left(-\frac{\ell}{2}+\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}\right)\right)$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

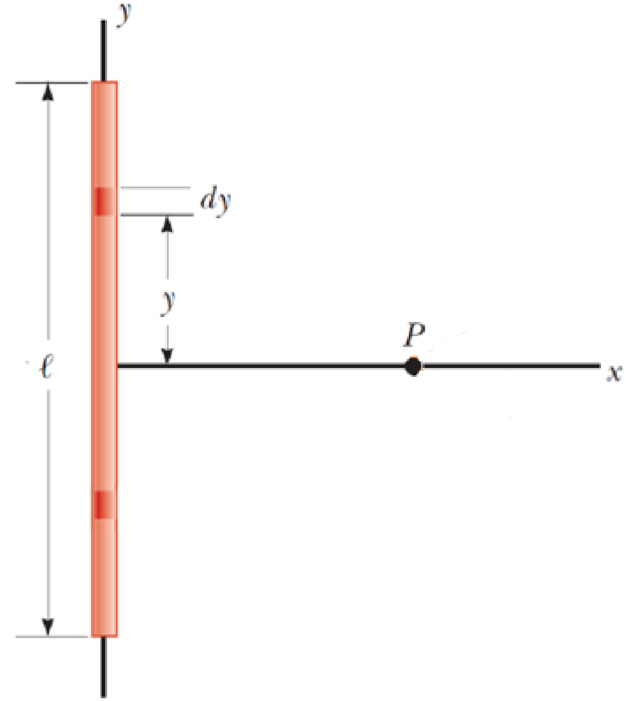
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο σημείο.

$$= k_e \lambda \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}+\frac{\ell}{2}}{\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}-\frac{\ell}{2}}\right).$$

Δείξετε ότι

$$E_x^P = -\frac{dV_P}{dx} = \dots = k_e \frac{Q}{x\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}}.$$

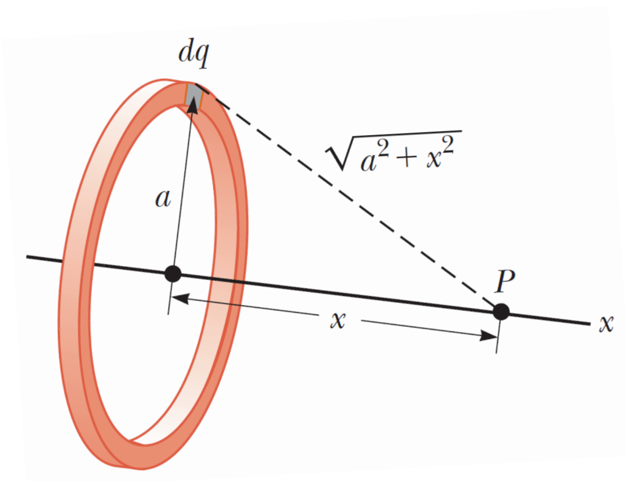


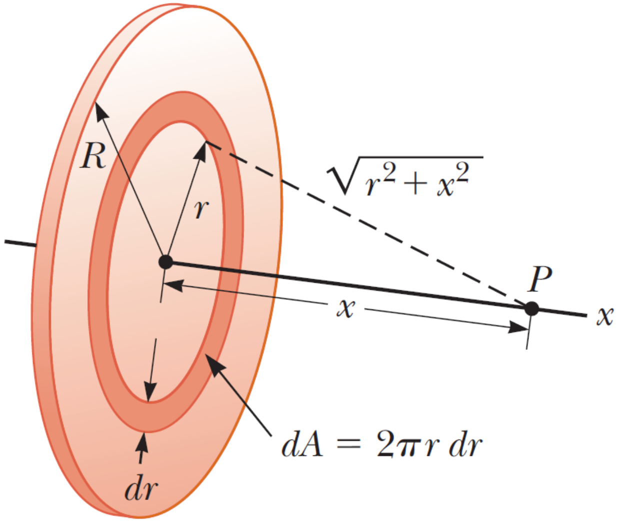
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 2 – Εξάσκηση ☺ :**
  - Δείξτε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P για τις παρακάτω κατανομές φορτίου δίνεται από τις σχέσεις

$$V_P = k_e \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad V_P = 2\pi\sigma k_e\left(\sqrt{x^2 + R^2} - x\right)$$

και βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο – που ήδη γνωρίζετε από προηγούμενες διαλέξεις – μέσω αυτών.

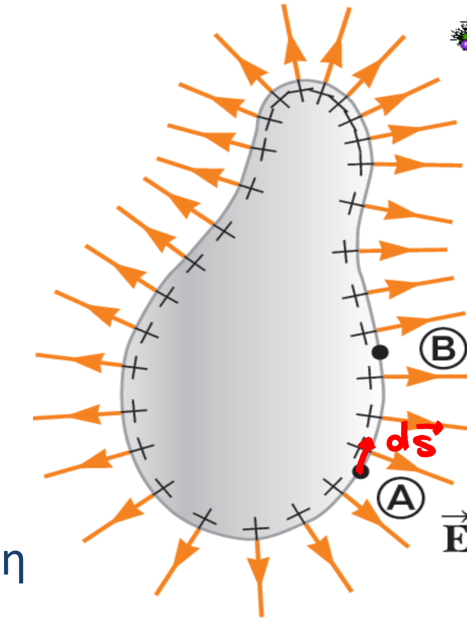




Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Αγωγοί – Δυναμικό**
  - Ας δούμε αν υπάρχουν ιδιότητες αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία οι οποίες είναι σχετιζόμενες με το δυναμικό
  - Έστω δυο σημεία A και B της επιφάνειας
    - **Για κάθε μονοπάτι στην επιφάνειά του** από το A στο B, το ηλεκτρικό πεδίο είναι **κάθετο** στη μετατόπιση $d\vec{s}$
    - Άρα

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



  - **<u>Συμπέρασμα</u>**: η επιφάνεια οποιουδήποτε φορτισμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι μια επιφάνεια **σταθερού δυναμικού**: κάθε σημείο της επιφάνειας έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Επιπλέον, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό οπουδήποτε εντός του αγωγού και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια

Τέλος Διάλεξης